انهيار اليقين *
هل يمكن ميكنة الحقائق؟

محمد عامر

مقـــدمة :

يرى بعض المشتغلين بالعلوم الإنسانية أو فلسفتها أن على هذه العلوم أن تنسج على منوال العلوم الطبيعية ، أو ما يسمى بالعلوم المنضبطة . وهم يربطون هذا بقضية استخدام الرياضيات كأداة ، كما يربطونه بقضية اليقين .

ولما كان من المتعارف عليه أن الرياضيات هي قلعة اليقين ، فقد يكون من المفيد أن يتعرف المشتغلون بالعلوم الإنسانية على ما آلت إليه قضية اليقين في الرياضيات ، حتى يقرروا لأنفسهم ما إذا كان من المجدي أن يجعلوا (أو يستمروا في جعل) بلوغ اليقين أحد أهدافهم .

وهذا المقال يركز على عرض وشرح النتائج التي نشرها كورت جودل Kurt Godel عام ١٩٣١ والتي تبين - فيما تبين - أنه لا يمكن (ولن يمكن) الاطمئنان إلى خلو كثير من النظريات الأساسية في الرياضيات من التناقضات المنطقية . ويربط المقال بين هذه النتائج وقضايا ميكنة الحقائق ، ثم يقدم ويناقش بعض الأفكار الفلسفية المتعلقة بهذه الأمور .

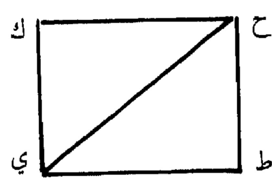
نظرة تاريخيـــة :

مرت الرياضيات في تاريخها بأزمات استوجبت إعادة النظر في الأسس التي تقوم عليها ، ولعل أولى هذه الأزمات تلك التي شهدتها الهندسة في عصر الفيثاغوريين منذ حوالي أربعة وعشرين قرناً .

كان الفيثاغوريون يأخذون بـ « المسلّمة » التالية ، ويقيمون براهين هندستهم عليها . لكل قطعتين مستقيمتين $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{حـد}}$ توجد قطعة مستقيمة $\overline{\text{هـو}}$

(*) هذا المقال مهدى إلى السيد الاستاذ الدكتور/ مصطفى سويف تحية لجهوده في ضبط العلوم الإنسانية ، وبمناسبة تجاوز سيادته سن الستين .

بحيث تكون كل من أب ، حـ د من مضاعفات هـ و . أي أننا إذا أخذنا هـ و كوحدة لقياس الطول ، كان كل من طول أ ب وطول حـ د عدداً صحيحاً . وكانت هذه « المسلمة » متفقة مع عقيدة الفيثاغوريين الكونية التي تجعل الأعداد الصحيحة أساس كل شيء . لكنهم ـ لبالغ أسفهم ـ اكتشفوا أن هذه « المسلمة » غير صحيحة . فقد استطاعوا إثبات أنه إذا كان ح ط ي ك مربعاً وكانت القطعة أ ب هي الضلع ح ط ، والقطعة حـ د هي القطر ح ي ، لما وجدت قطعة هـ و تحقق الشروط المطلوبة . فزعزع هذا عقيدتهم كلها وليس هندستهم فقط .



وقد ظلت الهندسة في أزمة إلى أن وضع يودوكسس (٤٠٨ ـ ٣٥٥ ق.م) تعريفه للتناسب . فدخلت بذلك الهندسة عصراً جديداً ، هو العصر الذي تسمى هندسته بالهندسة الأقليدية ، إذ أنها قد انتقلت إلينا من خلال كتاب أقليدس الشهير « المبادىء » .

لنقفز الآن ٢٣٠٠ سنة من الزمان لنصل إلى الأزمة التي شهدتها الرياضيات مع دورة القرن التاسع عشر ، والتي كانت نتائج جودل من تداعياتها . ولنوفر على القارىء مؤونة الدخول في تفصيلات فنية قد لا يستسيغها ، نكتفي بالقول بأن هذه الأزمة بلغت من العنف حداً استوجب إعادة النظر ليس في الرياضيات ذاتها فقط ، بل أيضاً في المنطق الذي تقوم عليه الرياضيات ، وفي اللغة التي تصاغ من خلالها الرياضيات .

وكتمهيد لعرض نتائج جودل سنناقش فيما يلي بعض المشكلات المنطقية ، ومن خلالها سنتعرض لبعض القضايا اللغوية . وسنحاول تجنب أو تبسيط الأمور الفنية قدر الإمكان . وعلى كل فنحن ندعو القارىء إلى عدم التهيب من هذه الأمور الفنية ، كما ندعوه إلى عدم التهيب من التعامل مع الرموز القليلة التي سنضطر إلى استخدامها .

الصـــدق :

الصدق عكس الكذب ، وكل منهما صفة من صفات الجُمَلْ ، أو بالأحرى بعض الجمل ، فالجمل الإُنشائية لا توصف بالصدق ولا بالكذب . لكننا نود أن يكون بـالامكان وصف كـل جملة خبريـة (ذات معنى) بالصـدق أو بالكذب ، وليس بالاثنين معاً . هنا تقابلنا عقبة كأداء ، يمكن تجسيدها في الجملة ةلتالية :

هـذه الجمـلة كاذبـة

فإذا ما افترضنا أن الجملة المكتوبة على السطر السابق صادقة خلصنا إلى أنها كاذبة ، والعكس بالعكس .

لأسباب كهذه اصطنع المناطقة لغات رمزية تبلغ من الضعف حداً لا يسمح بأن نصوغ فيها جملة تكذب نفسها . وفي نفس الوقت تكون على قدر من القوة يكفي لأن نصوغ فيها نظريات رياضية (أو علمية ، بصفة عامة) هامة .

كيف نتعامل مع اللغات الرمزية من حيث الصدق والكذب ؟ لننظر في المثال التالي ، الذي سنصوغه صياغة نصف رمزية تخفيفاً على القارىء .

لكل س ، توجد ص ، بحيث (س = ص + ص)

هل الجملة السابقة صادقة ؟ الجواب يتوقف على الإطار الذي نفسرها فيه . فإذا كان الإطار هو الأعداد الطبيعية : صفر ، ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . معرفاً عليها الجمع ، كان الجواب بالنفي لأننا لو أخذنا ٣ كقيمة س ، لما وجدنا عدداً طبيعياً ص بحيث (٣ = ص + ص) . أما إذا كان الإطار هو الأعداد الكسرية معرفاً عليها الجمع ، فإن الجواب يكون بالإيجاب . لأنه إذا كانت س عدداً كسرياً ، فإن $\frac{س}{٢}$ عدد كسري أيضاً . ولذا فما علينا إلا أن نأخذ $\frac{س}{٢}$ كقيمة ص لنجد (س = $\frac{س}{٢}$ + $\frac{س}{٢}$ = ص + ص) .

وعلى هذا فصدق الجملة أو كذبها لا يتوقف عليها وحدها ، وإنما يتوقف ـ بصفة عامة ـ على إطار التفسير أيضاً . والجمل الصادقة في جميع الأطر تسمى جملا صادقة منطقيا ، وتلك الكاذبة في جميع الأطر تسمى جملا كاذبة منطقيا .

البرهـان :

فكرة إقامة البراهين على مسلمات فكرة قديمة ، ترجع إلى عصر إقليدس ، على الأقل . أما الجديد فهو ألا ننتقل من خطوة في البرهان إلى خطوة أخرى إلا على أساس قواعد محددة سلفاً تسمى قواعد الاستنتاج . هذه القواعد ليست اختيارية تماماً ، بل يراعى في اختيارها أن تسمح بانسياب الصدق . أي أنه إذا كانت إحدى القواعد تنقلنا من عدة جمل (تسمى المقدمات) إلى جملة (تسمى التالية) ، فإن التالية تكون صادقة في كل إطار تصدق فيه جميع المقدمات . أيضاً يراعى في اختيار قواعد الاستنتاج أن تكون واضحة ، بحيث يسهل تبين مواضع تطبيقها ، كما يسهل تطبيقها نفسه ، بل إن كلا من هذا وذاك يجب أن يكون بالامكان إجراؤه بطريقة ميكانيكية .

وكمثال على قاعدة استنتاج يسهل أن نرى أنها تتمتع بكل الصفات السابقة ، نذكر قاعدة الفصل وهي :

من (أ ← ب) ، أ ينتج ب

حيث كل من أ ، ب جملة ، أما السهم « ← » فهو يعني الاستلزام . المقدمات هنا هي أ ، (أ ← ب) ، أما التالية فهي ب .

بالاستعانة بقواعد الاستنتاج ، يمكن أن نعرف البرهان على أنه متتابعة منتهية[1] من الجمل ، كل منها مسلمة ، أو يمكن استنتاجها ـ من جمل سابقة عليها في المتتابعة ـ بإحدى قواعد الاستنتاج . الجملة الأخيرة في المتتابعة تسمى مبرهنة ، والمتتابعة تسمى برهانها .

---

(١) في هذا المقال سنستخدم الكلمتين « منتهي » و « محدود » بمعنى واحد ، هو ليس لانهائيا .

هل ثمة شروط على المسلمات ؟ بصفة عامة لا ، لكننا نود في كثير من الأحيان أن يكون من السهل التعرف عليها ، بل أن يكون بالامكان أن نتعرف عليها بطريقة ميكانيكية . أي نريد أن تكون هناك ماكينة (كمبيوتر مثلا) إذا ما أعطيناها أية جملة من جمل لغتنا الرمزية قالت لنا ـ خلال فترة محدودة من الزمن ـ ما إذا كانت هذه الجملة مسلمة أم لا . وواضح أن هذا الشرط يكون مستوفى دائماً إذا ما كان عدد المسلمات منتهيا . لأنه ما على الماكينة في هذه الحال إلا أن تقارن الجملة المعطاة بالمسلمة الأولى ، فإن كانت هي ، وقفت مجيبة بالايجاب وإن لم تكن هي ، انتقلت إلى المقارنة بالمسلمة الثانية ، وهكذا . فإن لم تكن الجملة أياً من المسلمات ، توقفت الماكينة مجيبة بالنفي .

سنقول لمجموعة من المسلمات إنها فعالة إذا كان بالإمكان التعرف عليها ميكانيكيا . وبناء على الفقرة السابقة تكون كل مجموعة منتهية من المسلمات فعالة . هل توجد مجموعة من المسلمات لانهائية وفعالة في ذات الوقت ؟ نعم ، ببساطة خذ مجموعة المسلمات على أنها المجموعة المكونة من كل الجمل . لكن هل توجد مجموعة غير فعالة ؟ هذا ما سنعود إليه فيما بعد .

واضح أنه إذا ما اخترنا مسلماتنا بحيث تكون جميعها صادقة منطقيا ، كانت مبرهناتنا جميعها صادقة منطقياً كذلك . ماذا عن العكس ؟ هل يمكن اختيار مسلمات وقواعد استنتاج بحيث تكون كل الجمل الصادقة منطقياً مبرهنات ؟ نعم ، ببساطة اعتبر كل جملة صادقة منطقياً مسلمة ، وفي هذه الحال يمكن حتى الاستغناء عن قواعد الاستنتاج تماماً ، ويصير كل برهان مكوناً من جملة واحدة . لكن ماذا إذا ما اشترطنا في مسلماتنا أن تكون فعالة ؟

نالت هذه المشكلة قدراً كبيراً من اهتمام المناطقة . ويمكن القول بأنها قد حلت حلا إيجابياً بالنسبة للغات الرمزية التي تعنينا هنا . أي أمكن التوصل إلى مسلمات فعالة (سنسميها المسلمات المنطقية) وقواعد استنتاج بحيث تكون كل المبرهنات جملا صادقة منطقياً ، والعكس بالعكس .

النظـريات :

بالاستعانة بالمفاهيم والتعريفات السابقه ، يمكن إزالة كثير من الغموض الذي يكتنف مفهوم « النظرية » . فكلما ألحقنا بالمسلمات المنطقية مجموعة من المسلمات (سنسميها مسلمات إضافية) نتجت لنا مجموعة من المبرهنات التي تختلف ـ بصفة عامة ـ باختلاف المسلمات الإضافية الملحقة . مجموعة المبرهنات هذه تسمى نظرية ، على وجه التحديد النظرية المولدة بالمسلمات الإضافية .

قد يكون من المفيد أن نذكر على سبيل المثال ، نظرية الهندسة الاقليدية . من مبرهنات هذه النظرية الجملة القائلة بأن مجموع زوايا المثلث مائة وثمانون درجة . نحتاج لبرهان هذه الجملة المسلمات الإضافية الخاصة بالهندسة الاقليدية ، فهي لا يمكن برهنتها انطلاقاً من المسلمات المنطقية فقط . بل إننا إذا استبدلنا بمسلمات الهندسة الاقليدية مسلمات إحدى الهندسات اللاإقليدية ، أمكننا البرهان على أن مجموع زوايا المثلث تختلف عن مائة وثمانين درجة . بالرغم من أن الأساس المنطقي هو هو ، أي نفس المسلمات المنطقية ونفس قواعد الاستنتاج .

وحتى لا يحدث أي لبس ، نود أن نوضح أن أية جملة يمكن أن تختار كمسلمة إضافية . أي أننا لا نشترط في المسلمات الاضافية أن تكون واضحة بذاتها أو أي شيء من هذا القبيل . فالمسلمات الإضافية هي إذن أقرب إلى الفروض منها إلى المفهوم القديم للمسلمات .

هذا لا يعني أن المسلمات تختار اعتباطاً . فهناك عوامل علمية وتاريخية وجمالية وغير ذلك تؤثر في الاختيار . وليس هنا مجال تفصيل هذا الأمر . ولذا فإننا سنكتفي بالحديث الموجز عن اعتبارين نحاول عادة أن نراعيهما في اختيار المسلمات الاضافية هما : الاتساق والفعالية .

يقال لنظرية (أو لمجموعة المسلمات الإضافية التي تولدها) انها متسقة إذا لم يكن من بين مبرهناتها جملتان إحداهما تتنافى مع الأخرى . ويمكننا إدراك خطورة قضية الاتساق إذا ما عرفنا أن المناطقة قد أثبتوا (الاثبات سهل ، لكننا لن نثقل به على القارىء هنا) أن النظرية غير المتسقة تشمل مبرهناتها جميع الجمل . أي أنه في حال عدم الاتساق يمكن برهان كل جملة كما يمكن برهان نفي كل جملة ، وبذا تفقد النظرية جدواها .

الفعالية ، عرفناها من قبل . وأهمية أن تكون النظرية ذات مسلمات إضافية فعالة تكمن في أنه إن لم يكن الأمر كذلك فسيتعذر التعرف على هذه المسلمات . بمعنى أننا إذا أعطينا جملة فقد لا نتمكن من الحكم على ما إذا كانت هذه الجملة إحدى المسلمات الإضافية أم لا .

هناك أيضاً ميزة هامة أخرى . لنفرض أن لدينا مجموعة فعالة من المسلمات الاضافية . إذا أعطينا أية متتابعة منتهية من الجمل فإنه سيكون بإمكاننا أن نعرف بالنسبة إلى كل جملة منها ما إذا كانت مسلمة (منطقية أو إضافية) ، أو يمكن استنتاجها ـ من جمل سابقة عليها في المتتابعة . بإحدى قواعد الاستنتاج ، أولا هذا ولا ذاك . ويمكن أن يجري كل هذا بطريقة ميكانيكية .

وعلى هذا فبالنسبة إلى أية نظرية ذات مجموعة فعالة من المسلمات الإضافية ، تتحول عملية الحكم على ما إذا كانت متتابعة منتهية ما من الجمل برهاناً أم لا إلى عملية ميكانيكية بسيطة ، بعد أن كانت عملية ذات أبعاد عقلية ونفسية عميقة .

الاسئلة :

مادام الاتساق وتوافر مسلمات إضافية فعالة ، من الصفات الهامة للنظريات ، فمن الطبيعي أن نسأل بالنسبة إلى نظرية رياضية ما ، إذا ما كانت تتمتع بهاتين الصفتين .

وهذا ما فعله جودل بالنسبة إلى نظرية الأعداد . والمقصود بالأعداد هنا هي الأعداد الطبيعية : صفر ، ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . . والذي أهّل هذه النظرية لأن تكون موضع عناية جودل هو أنها نظرية محورية في الرياضيات وفي المعرفة البشرية بصفة عامة ، وأن لها أهمية تاريخية فائقة ، وأنها بسيطة بالمقارنة بكثير غيرها من النظريات .

ما المقصود بالضبط بنظرية الأعداد ؟ اتخذ جودل لنفسه لغة رمزية (لن نثقل على القارىء بتفصيلاتها) يمكنه أن يتحدث بها عن الأعداد وجمعها وضربها . وكما بينا في حديثنا عن الصدق (انظر عاليه) ، فإن صدق أو كذب جمل هذه اللغة يتوقف على الاطار الذي نفسرها فيه . والاطار الطبيعي للتفسير في حالنا هذه هو الأعداد الطبيعية معرفاً عليها الجمع والضرب . سنسمي هذا الإطار ، الإطار الطبيعي .

مجموعة الجمل الصادقة في الإطار الطبيعي تكون نظرية ، سنرمز إليها بالرمز ن ، وهي ما سنعتبره ـ في هذا المقال ـ نظرية الأعداد ، وأيضاً مجموعة الحقائق المتعلقة بالأعداد .

هل يمكن توليد ن من مجموعة من المسلمات الإضافية ؟ نعم ، ببساطة اجعل ن كلها مجموعة المسلمات الاضافية . لكن ماذا عن الفعالية ؟ هل توجد مجموعة فعالة من المسلمات الاضافية بحيث تكون ن هي النظرية المولدة بها ؟ هذا هو السؤال الأول الذي طرحه جودل[٢] .

لم يبدأ جودل محاولة الاجابة من فراغ . فقد كان لديه بالفعل مسلمات نظرية الأعداد التي تنسب إلى الرياضي الايطالي بيانو (يقال أن الأصوب أن تنسب إلى الرياضي الألماني ديديكند) . أعاد جودل صياغة هذه المسلمات في لغته الرمزية ، وانطلق منها كمجموعة من المسلمات الاضافية . سنرمز إلى هذه المجموعة من المسلمات الإضافية بالرمز م ، وإلى النظرية المولدة بها بالرمز ب .

يمكن بسهولة إثبات أن كل مسلمة في المجموعة م صادقة في الإطار الطبيعي ، وبالتالي فإن كل مبرهنة في ب صادقة بدورها في الإطار الطبيعي . وعلى هذا فالنظرية ب هي جزء من النظرية ن .

يمكن بسهولة أيضاً إثبات أن المجموعة م فعالة . ومن ثم فإن النظرية ب مولدة بمجموعة فعالة من المسلمات . وعلى هذا فإذا كانت (ن = ب) فإن الاجابة عن سؤال جودل الأول ستكون بالايجاب .

هل (ن = ب) ؟ هذا هو سؤال جودل الثاني . أما سؤال جودل الثالث فهو : ماذا عن اتساق ب ؟

إذا كانت الاجابة عن السؤال الثاني بالإيجاب ، فإن قضية اتساق ن ستكون هي نفسها قضية اتساق ب . أما إذا كانت الإجابة بالنفي ، فإن اتساق ن يستلزم اتساق ب والعكس قد لا يكون صحيحاً . أما لماذا اهتم جودل باتساق ب دون ن ، فهذا ما سيتضح فيما بعد .

(٢) ما نفعله هنا ليس بالضبط ما فعله جودل ، فسنسمح لأنفسنا بالاستفادة من التطورات التي جرت بعد عام ١٩٣١ ، كما أننا نبسط الأمور كثيراً ، بعدا بالقارىء عن التعقيدات الفنية .

الجمل والاعـــداد :

من قديم طوّر الناس ما يسمى بحساب الجمل . وهو ـ عند العرب المشارقة ـ عقد تناظر بين حروف الهجاء تبعاً لترتيبها الوارد في أبجد هوز . . . وبين الأعداد . فالأحرف التسعة الأولى للآحاد ، والتي تليها للعشرات ، والتي تليها للمئات ، والحرف الأخير « غ » ، للألف . وبذا تدل كل كلمة على عدد ، هو مجموع الأعداد التي تناظر حروفها . وتدل كل جملة على عدد ، هو مجموع الأعداد التي تدل عليها كلماتها . فمثلا « في المشمش » تدل على ٨٠١ . ولذا فعندما سئل أحد الظرفاء عن تاريخ موت السلطان برقوق ، أجاب : في المشمش (انظر المعجم الكبير ـ حرف الهمزة ـ إصدار مجمع اللغة العربية عام ١٩٧٠ ـ ص ٢٣) .

ويبدو أن جودل قد استفاد من هذه الأفكار ، فناظر بين رموز لغته وبين بعض الأعداد ، بطريقة ليس هنا مجال شرح تفصيلاتها . سمحت هذه الطريقة لجودل أن يناظر أيضاً بين الجمل وبين بعض الأعداد ، وأيضاً بين المتتابعات المنتهية من الجمل وبين بعض الأعداد . لكن تركيز جودل لم يكن على أن الجمل تدل على أعداد ، بل على أن بعض الأعداد تدل على رموز ، أو على جمل ، أو على متتابعات منتهية من الجمل . وبذا صار بإمكانه أن يخبر عن الجمل ، بأن يخبر عن الأعداد التي تدل عليها . فمثلا نجح جودل في أن يصوغ في لغته الرمزية جملة تقول « أ ، ك كذا وكذا وكذا » ، بحيث يكون تفسير هذه الجملة في الاطار الطبيعي هو أن أ عدد يدل على جملة ، و ك عدد يدل على متتابعة منتهية من الجمل ، هي برهان للجملة التي يدل عليها العدد أ ، انطلاقاً من مجموعة المسلمات الاضافية $\overset{8}{\text{م}}$.

أكثر من ذلك ، استطاع جودل أن يصوغ جملة حـ تفسيرها في الإطار الطبيعي هو :

لا يوجد برهان للجملة جـ انطلاقا
من مجموعة المسلمات الاضافية $\overset{8}{\text{م}}$

أي أن الجملة حـ تتحدث عن نفسها بطريقة تذكرنا بالجملة التي تكذب نفسها ، التي تحدثنا عنها من قبل .

النتــائج :

هل الجملة حـ صادقة في الإطار الطبيعي ، وهل هي بالتالي إحدى مبرهنات النظرية $\overset{8}{\text{ن}}$ ؟ هل هي إحدى مبرهنات النظرية $\overset{8}{\text{ب}}$ ؟

لنبحث الأمر . لنفرض أن حـ إحدى مبرهنات $\overset{8}{\text{ب}}$. إذن حـ إحدى مبرهنات $\overset{8}{\text{ن}}$ ، لأن $\overset{8}{\text{ب}}$ جزء من $\overset{8}{\text{ن}}$. أيضاً ، فرضنا أن حـ إحدى مبرهنات $\overset{8}{\text{ب}}$ ، يعني أنه يوجد برهان للجملة حـ انطلاقاً من مجموعة المسلمات الاضافية $\overset{8}{\text{م}}$. من هذا نرى أن حـ كاذبة في الإطار الطبيعي . ومن ثم فإن حَـ (التي سنرمز بها إلى نفي حـ) صادقة في الإطار الطبيعي ، وبالتالي فإن حَـ إحدى مبرهنات $\overset{8}{\text{ن}}$. وعلى هذا فإن النظرية $\overset{8}{\text{ن}}$ غير متسقة لأن كلا من حَـ ، ونفيها حَـ ، من بين مبرهنات $\overset{8}{\text{ن}}$.

ملخص ما سبق هو :

إذا كانت حـ إحدى مبرهنات ب8 ، فإن ن8 غير متسقة .

وبأخذ عكس النقيض ـ كما يقول المناطقة ـ نخلص إلى أن :

إذا كانت ن8 متسقة ، فإن حـ ليست إحدى مبرهنات ب8 .

لنفرض الآن أن ن8 متسقة . إذن حـ ليست إحدى مبرهنات ب8 . وهذا يعني أنه لا يوجد برهان للجملة حـ انطلاقاً من مجموعة المسلمات الاضافية م8 . من هذا نرى أن حـ صادقة في الاطار الطبيعي ، وبالتالي فإن حـ إحدى مبرهنات ن8 . بإضافة هذا إلى النتيجة السابقة نصل إلى أنه :

إذا كانت ن8 متسقة ، فإن حـ إحدى
مبرهنات ن8 ، لكنها ليست إحدى مبرهنات ب8 .

وعلى هذا فإن ن8 تختلف عن ب8 . وبذا نكون قد أجبنا عن سؤال جودل الثاني بالنفي ، بفرض أن ن8 متسقة .

ما سبق لا يكفي للاجابة عن السؤال الأول بالنفي هو الآخر . حقاً إننا نعرف الآن أن م8 لا تولد ن8 (بفرض أن الأخيرة متسقة) ، لكن أليس من الممكن تقوية م8 ، بإضافة حـ أو غيرها إليها ، بحيث يكفي الناتج لتوليد ن8 ؟ لاحظ أننا هنا لا نبحث عن أية مجموعة مولدة للنظرية ن8 ، وإنما نبحث عن مجموعة فعالة تفي بالغرض . لكننا نستطيع أن نفعل مع أية مجموعة فعالة ـ تشمل م8 ، وتشتمل عليها ن8 ـ ما فعلناه مع م8 ، لنثبت أنها لا تولد ن8 (بفرض أن الأخيرة متسقة) . ومن هذا يمكن أن نستنتج :

إذا كانت ن8 متسقة ، فإنه لا يمكن توليدها
بأية مجموعة فعالة من المسلمات الاضافية .

وبذا نكون قد أجبنا عن سؤال جودل الأول بالنفي هو الآخر ! (بفرض أن ن8 متسقة) .

●●●

هذه النتيجة الخطيرة ، التي تعني أننا لا نستطيع ـ عمليا ـ أن نقيم النظرية ن8 على مسلمات ، جديرة بأن نتوقف عندها قليلا . هل المشكلة في المنطق ، أي في المسلمات المنطقية وقواعد الاستنتاج ، وبالتالي فإذا قوينا المنطق فقد تحل المشكلة أم أن المشكلة في اللغة الرمزية التي اختارها جودل ، وبالتالي فحل المشكلة قد يكمن في تغيير اللغة ؟ أم ماذا ؟

للإجابة عن هذه الأسئلة ، علينا أن نتعامل مع مفهوم جديد ، هو « فعالية التولد » . سنقول لمجموعة من الجمل إنها فعالة التولد ، إذا كان بالامكان توليدها بطريقة ميكانيكية . أي إذا كانت هناك آلة (كمبيوتر مثلا) تولدها واحدة فواحدة . وبالرغم من أن عملية التوليد قد تستمر إلى مالا نهاية ، فإن كل جملة يجب أن تظهر بعد فترة زمنية محدودة ،

طالت أم قصرت . وذلك مثل عملية العد ، فهي لا تنتهي أبداً ، لكن كل عدد سيأتي دوره في الظهور بعد فترة زمنية محدودة .

من السهل أن نرى أن كل مجموعة فعالة ، لابد وأن تكون فعالة التولد ، ذلك لأنه يمكن التعرف عليها ميكانيكياً ، والآلة التي تتعرف عليها ، يمكنها بتعديل بسيط ـ أن تولدها فما علينا إلا أن ندخل جمل اللغة كلها إلى الآلة واحدة فواحدة . ونجعل للآلة فتحتين تخرج من أولاهما الجمل التي تتعرف عليها الآلة على أنها من مجموعتنا ، وتخرج من الثانية بقية الجمل . وبذا تولد الآلة ـ بما يخرج من فتحتها الأولى ـ جمل المجموعة واحدة واحدة .

بالمثل يمكن إثبات أن أية نظرية مولدة بمجموعة فعالة من المسلمات الإضافية ، لابد أن تكون فعالة التولد . ذلك لأنه توجد ـ في هذه الحال ـ آلة بامكانها التعرف على البراهين . فما عليك إذن إلا أن تدخل إلى هذه الآلة جميع المتتابعات المنتهية من الجمل ، واحدة فواحدة . اجعل للآلة فتحتين ، واطلب منها ، إذا ما تعرفت على متتابعة على أنها برهان ، أن تخرج الجملة الأخيرة (أي المبرهنة) من أولى الفتحتين . أما بقية الجمل فتخرج من الفتحة الثانية . بذا تولد الآلة ـ بما يخرج من فتحتها الأولى ـ مبرهنات النظرية واحدة واحدة .

يمكن أيضاً إثبات أن عكس المقولة السابقة صحيح ، أي أن أية نظرية فعالة التولد ، لابد وأن يكون بالامكان توليدها بمجموعة فعالة من المسلمات الإضافية . وعلى هذا فيمكننا إعادة صياغة سؤال جودل الأول كالتالي :

هل ن8 فعالة التولد ؟

هذا السؤال المعدل يكافىء السؤال الأول ، لكنه سؤال في « ميكنة » الحقائق ، وليس ـ كالسؤال الأول ـ في المنطق .

إعادة الصياغة لن تؤثر في الإجابة . وبالتالي فالاجابة عن السؤال المعدل هي أيضاً بالنفي (بفرض أن ن8 متسقة) . لكن الصياغة المعدلة تساعدنا على التعرف على أبعاد الموقف بطريقة أفضل . لقد سألنا آنفاً إذا ما كانت المشكلة في المنطق ، أم في اللغة ، أم ماذا ؟ لنفرض أن اللغة باقية كما هي ، وأن ن8 متسقة . تغيير المنطق (المسلمات المنطقية وقواعد الاستنتاج) لن يغير من ن8 شيئا ، لأن الذي يحدد جمل ن8 ليس البرهان الذي يتوقف على المنطق ، وإنما الصدق الذي لا يتوقف إلا على اللغة وإطار التفسير ، وعلى هذا فإن ن8 ستبقى كما هي ، وعلى وجه التحديد ستبقى غير فعالة التولد ، مهما غيرنا المنطق . ومن ثم فالحل الوحيد للمشكلة هو أن نغير المنطق بما يسمح لمجموعة فعالة من المسلمات الاضافية أن تولد نظرية غير فعالة التولد . وهذا ممكن إذا ما تنازلنا عن شرط الفعالية في مجموعة المسلمات المنطقية أو عن شرط إمكان التعامل مع قواعد الاستنتاج بطريقة ميكانيكية . لكن لا هذا ولا ذاك مرغوب فيه . فالتنازل عن الشرط الأول يعني أننا قد لا نتمكن من التعرف على مسلماتنا المنطقية ، والتنازل عن الشرط الثاني يعني أننا قد لا نعرف متى أو كيف نطبق قواعد الاستنتاج .

بقي أن ننظر في تغيير اللغة . وهذا طبعاً ممكن ، وسيأتي بنتيجة سريعة ، إذ أن ن تتغير بتغير اللغة . غير أنه إذا كانت اللغة الجديدة على نفس مستوى اللغة القديمة ، أو أقوى (أي أقدر على التعبير) ، فإن ن الجديدة لن تكون فعالة التولد ، وبالتالي ستبقى المشكلة كما هي ، إن لم تزدد تعقيداً . أما إذا كانت اللغة الجديدة أضعف من اللغة القديمة ، فإن ن قد تصير فعالة التولد ، أو حتى فعالة ، وبذا تكون مشكلتنا محلولة بالنسبة إلى هذه اللغات الضعيفة . فعلى سبيل المثال إذا ما أضعفنا لغتنا بما لا يسمح لها بالحديث عن ضرب الأعداد ، أي أن اللغة الجديدة ستكون قادرة على الحديث عن الأعداد وجمعها ، لكن ليس ضربها ، فإن ن ستصير فعالة ، وليست فقط فعالة التولد .

القارىء اليقظ لابد وأن يكون قد لاحظ أننا في طيات تحليلنا السابق قد عالجنا سؤالا كنا قد تركناه مفتوحا حين طرحناه . ألا وهو : هل توجد مجموعة غير فعالة ؟ إذ أن ن (في اللغة الأصلية) ليست فقط غير فعالة ، وإنما أيضاً غير فعالة التولد (بفرض أنها متسقة) .

●●●

كتمهيد لبحث قضية اتساق ب (السؤال الثالث) نود أن نوضح أن التحليل الذي أجراه جودل في معرض معالجته لسؤاله الثاني كان أعمق من تحليلنا ، وأنه بتعامله مع التركيب الداخلي الدقيق للجملة حـ قد استطاع أن يصل إلى النتيجة الأقوى التالية :

إذا كانت ب متسقة ، فإن حـ ليست إحدى مبرهناتها (*) .

بطريقة مشابهة لتلك التي جرت بها صياغة الجملة حـ ، يمكن صياغة جملة د تفسيرها في الإطار الطبيعي هو :

ب متســـقة .

وبذا يكون تفسير الجملة (د ← حـ) في الاطار الطبيعي هو (*) على وجه التحديد . وقد أوضح جودل أن اثبات (*) يمكن تقليده في اللغة الرمزية لنصل إلى أن :

(د ← حـ) إحدى مبرهنات ب .

فإذا كانت :

د إحدى مبرهنات ب .

فإننا نصل بقاعدة الفصل إلى أن :

حـ إحدى مبرهنات ب .

وهذا يتعارض مع اتساق ب ، كما تبين (*) . من هذا نخلص إلى النتيجة الهامة الآتية :

إذا كانت ب متسقة ، فإن د ليست إحدى مبرهناتها .

وبالنظر إلى تفسير د في الإطار الطبيعي ، فإن هذا يعني أنه إذا كانت ب^{8} متسقة ، فإنه لا يمكن إثبات ذلك بالطرق المستخدمة لإثبات مبرهنات ب^{8} .

من الطبيعي أن نسأل ماذا يحدث إذا ما أضفنا د إلى ب^{8} ؟ نحصل على نظرية أقوى ، يمكننا فيها إثبات أن ب^{8} متسقة . لكن ما فعلناه مع ب^{8} يمكن تكراره مع النظرية الجديدة ، وبالتالي لا يمكن إثبات أن النظرية الجديدة متسقة (بفرض أنها كذلك) بالطرق المستخدمة لاثبات مبرهناتها . وهكذا فالمشكلة تطل علينا برأسها من جديد ، ولكن في ظروف أعقد . ونفس الشيء يسري على أية تقوية للنظرية ب^{8} ، مادام يمكن توليدها بمجموعة فعالة من المسلمات الإضافية .

وعلى هذا فلا يمكننا الاطمئنان إلى اتساق ب^{8} ، ولا إلى اتساق كثير غيرها من النظريات الأساسية في الرياضيات ، إذ أن اثبات هذا الاتساق يتطلب نظرية لا يقل شكنا في اتساقها عن شكنا في اتساق النظرية الأصلية نفسها .

أرجو أن يكون قد اتضح الآن لماذا اهتم جودل بقضية اتساق ب^{8} . أما عن لماذا لم يعر قضية اتساق ن^{8} نفس الاهتمام ، فلعل ذلك لأنه كان مهتماً بالنتائج السلبية ، أي بتوضيح أن قضية الاتساق تنطوي على مشكلة وبالتالي فمن الأوجب أن يتعامل مع النظرية الأضعف ، أي ب^{8} . ومادمنا غير متيقنين من اتساق ب^{8} ، فإننا ـ من باب أولى ـ لن نكون متيقنين من اتساق ن^{8} .

خاتمــة :

تبين لنا النتائج السابقة بعض حدود المعرفة . وقضية حدود المعرفة مبحث فلسفي قديم . والجديد هو أن يسهم العلم في علاجها ، وإن كان اسهامه في تبيان بعض الحدود الأخرى ، التي شغل بأمرها الفلاسفة منذ زمن طويل ، ليس بنفس القدر من الجدة .

فبتطور النظرية الذرية على أسس علمية مقبولة خلال القرن التاسع عشر ، أسهم العلم في الاجابة عن سؤال فلسفي قديم متعلق بحدود إمكان تقسيم المادة . وقد تجدد هذا الاسهام ـ الذي لم يكن أبدا كلمة أخيرة ـ خلال القرن العشرين بفعل نظريات تركيب الذرة من جسيمات أولية ، ونظريات تركيب بعض الجسيمات الأولية مما يسمى بالكوارك ، ونظريات تحول المادة إلى طاقة ، وظهور الأخيرة على شكل كمات . .

وقد بينت لنا نظرية النسبية (عام ١٩٠٥) حداً آخر ، هو حد السرعة . فإذا كانت سرعة أحد جسمين بالنسبة للآخر أقل من سرعة الضوء في الفراغ في لحظة ما ، فلا يمكن أن تزيد عليها أبدا ، أي أن سرعة الضوء في الفراغ (حوالي ٣٠٠ ألف كيلو متر في الثانية) هي حد السرعة .

أما ميكانيكا الكم فقد أتتنا (عام ١٩٢٧) بمبدأ عدم التحدد ، القائل بأن مقدار عدم التحدد في موضع جسيم ما ، مضروبا في مقدار عدم التحدد في زخمه (أي كمية حركته) لا يقل عن مقدار ثابت (لا يتوقف على الجسيم . وقد ذهب المشتغلون بالفيزياء وفلسفتها في تفسير هذا المبدأ مذهبين . يقول الأول إن عدم التحدد خاصة موضوعية من خواص موضوع المعرفة ، وبالتالي فهو لا يضع قيدا على المعرفة . وعلى هذا تكون نتائج جودل أول نتائج علمية متعلقة بحدود المعرفة . ويرجع المذهب الثاني عدم التحدد إلى الذات العارفة والأجهزة التي تستخدمها ، وبالتالي فهو يعتبره قيداً على المعرفة . وعلى هذا يكون مبدأ عدم التحدد هو أول النتائج العلمية المتعلقة بحدود المعرفة ، ونتائج جودل هي الثانية .

●●●

وسواء أكانت نتائج جودل هي الأولى أم الثانية ، فعلينا أن نتفهم أبعادها . ولنبدأ بالنتيجة القائلة بأن ن^{8} ليست فعالة التولد . هذه النتيجة تعني أنه لا يمكننا معرفة كل الحقائق المتعلقة بالأعداد . وَرُبَّ قائل : أما كان يكفي إثبات أن ن^{8} لا نهائية ؟ فمعرفتنا ـ مهما زادت ـ ستظل محدودة ، وبالتالي لا يمكننا معرفة كل الحقائق المتعلقة بالأعداد ، إذا كانت لانهائية . الجواب : نعم ، ما كان يكفي . فنحن قادرون ـ بمعنى معقول جدا ـ على معرفة عدد لانهائي من الحقائق . ألسنا نعرف أن ١ + ١ = ٢ ، ١ + ٢ = ٣ ، . . . ، ١ + ٨ = ٩ ، ١ + ٩ = ١٠ ، . . . . ، ١ + ٨٤ = ٨٥ ، . . . وهكذا إلى مالا نهاية ؟ أكثر من هذا ، نستطيع أن نقول إننا نعرف أية مجموعة فعالة ، متى توصلنا إلى آلة قادرة على التعرف عليها . لأننا ـ في هذه الحال ـ ما علينا إذا ما أعطينا جملة من الجمل إلا أن نضعها في الآلة التي ستقف بعد فترة محدودة من الزمن قائلة لنا إذا ما كانت الجملة في مجموعتنا أم لا . يرد هنا اعتراض على القيمة العملية لهذه المعرفة . إذ أن الآلة قد تستمر في العمل مليون سنة قبل أن تصدر حكمها على جملة ما . بالرغم من وجاهة هذا الاعتراض ، فسيظل بإمكاننا أن نقول إننا نعرف ، على الأقل نظرياً ، على الأقل من حيث المبدأ .

يصير الأمر أكثر تعقيداً إذا كانت لدينا نظرية فعالة التولد ، لكنها ليست فعالة . في هذه الحال لا توجد آلة قادرة على التعرف على جمل النظرية ، وإنما توجد آلات قادرة على توليدها فقط . لنفرض أن لدينا إحدى هذه الآلات ، وأن لدينا جملة ما ، لا نعرف إذا ما كانت في النظرية أم لا . إذا كانت الجملة في النظرية ، فإنها ستخرج من الآلة بعد وقت طال أم قصر . وبالتالي فسنعرف أنها في النظرية . أما إذا لم تكن في النظرية ، فإنها لن تخرج من الآلة مهما طال انتظارنا ، وفي نفس الوقت لن تصدر الماكينة حكما بأنها لن تخرج أبدا . الآلة إذن لن تحسم الأمر ، وبالتالي فإن فائدتها ـ مهما عظمت ـ ستكون جزئية فقط .

يمكننا أن ننظر إلى الأمر بشكل آخر . فلكل نظرية فعالة التولد توجد مجموعة فعالة من المسلمات الإضافية المولدة . فإذا ما وضعنا يدنا على مجموعة فعالة مولدة ، فإننا سنعرف الكثير عن النظرية . ذلك لأنه سيوجد لكل جملة في النظرية برهان انطلاقاً من هذه المجموعة الفعالة ، ومن ثم فإن مفهوم البرهان سيصير أوضح وأبسط كما بينا آنفاً . وهذا سيسهل التعامل مع البراهين ، سواء أكنا نحاول برهنة جملة ما ، أم نحاول إثبات عدم وجود برهان لها ، وإن كان لا يوجد ما يضمن نجاح هذه المحاولات . على كل هذه النظرة تكافىء النظرة السابقة ، كما أشرنا من قبل .

هل لنا إذن أن نقول إننا نعرف النظرية فعالة التولد ، إذا ما عرفنا آلة تولدها ؟ هذه مسألة فيها نظر . ويبدو أنه مما يساعد على حلها أن نأخذ بأن المعرفة مفهوم مركب ، وبدلا من أن نسأل ، هل نعرف ؟ أو ، هل يمكن أن نعرف ؟ نسأل إلى أية درجة نعرف ؟ أو ، إلى أية درجة يمكن أن نعرف ؟ إذا ما قبلنا هذا ، فإن التحليل السابق (وهو الآن يحتاج إلى شيء من التعديل الذي سنتركه للقارىء) يجيز لنا أن نقول إنه ليس بإمكاننا أن نعرف النظريات فعالة التولد (التي ليست فعالة) بنفس الدرجة التي يمكننا أن نعرف بها النظريات الفعالة . أي أن هناك حدوداً للمعرفة !

لكن هل توجد نظرية فعالة التولد ، لكنها ليست فعالة ؟ نعم ، وأول نظرية عرف عنها هذا هي النظرية $ب^{8}$ (بفرض أنها متسقة) . وعلى هذا فالمشكلة تبدأ من $ب^{8}$ ، لكن مشكلة $ن^{8}$ أكبر ، لأن $ن^{8}$ (بفرض اتساقها) ليست حتى فعالة التولد . ولذا فإن درجة معرفتنا بالنظرية $ن^{8}$ لا يمكن أن تصل حتى إلى الدرجة التي يمكن أن تصل إليها معرفتنا بالنظرية $ب^{8}$. فمثلا نحن نعرف للنظرية $ب^{8}$ مجموعة (فعالة) من المسلمات الإضافية التي تولدها ، وهذا مالا يمكننا أن نعرفه للنظرية $ن^{8}$.

وكما أسلفنا فإن من أوجه قصور معرفتنا بالنظرية $ب^{8}$ ، أننا لن نعرف طريقة عامة (أي لن نتوصل إلى آلة) نستطيع عن طريقها أن نحكم على كل جملة إذا ما كانت في $ب^{8}$ أم لا . إنَّ وجه القصور هذا قائم (بل انه أكثر شدة ، إنْ جاز التعبير) بالنسبة للنظرية $ن^{8}$. وبهذا المعنى نقول إننا لا يمكننا معرفة كل الحقائق المتعلقة بالأعداد (أي كل الجمل الواقعة في $ن^{8}$) .

أصابت هذه النتيجة البعض بشيء من خيبة الأمل . لكنها لا تخلو من جانب مشوق . فهي تزيد من التحدي ، وبالتالي تزيد من استثارة الهمم . فالنتيجة لا تقول إن هناك جملة بعينها غير قابلة لأن نحكم عليها . إنها تقول فقط إنه لا توجد طريقة واحدة صالحة للحكم على كل الجمل . وبالتالي علينا دائماً أن نبتكر طرقاً جديدة . وهذا خليق بأن يرضي غرور الرياضيين ، إذ أن الحاجة إلى ابتكاراتهم لن تنتهي ، ولن يمكن الاستعاضة عنهم بآلة ، أو بكمبيوتر أبدا .

لقد راود الرياضيين أمل بأن تكون مسلمات بيانو (المشار إليها آنفاً) كافية لبرهنة كل الحقائق المتعلقة بالأعداد . فبدد جودل هذا الأمل بنتيجته العبقرية . لكنه لم يتركنا حائرين بعد أن أخرجنا من نعيم الجهل (وأخو الجهالة في الشقاوة ينعم !) . إذ أنه بإثباته أن حـ تقع في $ن^{8}$ ولا تقع في $ب^{8}$ ، فتح لنا الطريق كي نحصل على نظرية أقوى باضافة حـ (أو غيرها من الجمل التي تقع في $ن^{8}$ ولا تقع في $ب^{8}$) إلى المسلمات الاضافية التي تقوم عليها $ب^{8}$. وهكذا يمكننا أن نحصل على نظريات أقوى وأقوى (تقوم كل منها على مجموعة فعالة من المسلمات الإضافية) دون أن نصل إلى $ن^{8}$ أبداً . أي أن دائرة الضوء تتسع وتتسع ، لكنها لن تضيء كل الحقائق أبدا . أيضاً ، فتح لنا جودل بنتيجته هذه طرقاً أخرى ، لكن المجال لا يسمح لنا باصطحاب القارىء إلى جولة فيها .

●●●

لننتقل الآن إلى نتيجة جودل الثانية القائلة بأنه إذا كانت ب8 متسقة ، فإنه لا يمكن إثبات ذلك بالطرق المستخدمة لاثبات مبرهنات ب8 . هذه النتيجة لا تعني أن ب8 ليست متسقة ، كما أنها لا تعني أن ب8 متسقة . فهي تترك الباب مفتوحا لهذا وذاك . كل ما نستطيع أن نبتيه عليها هو أنه إذا كانت ب8 متسقة ، فإننا لن نستطيع معرفة هذا بطريقة نطمئن إليها .

زادت هذه النتيجة من شكوك أصحاب الاتجاهين الحدسي والبنائي (وهما اتجاهان في الرياضيات وفلسفتها ازدهرا في بدايات هذا القرن استجابة للأزمة التي شهدتها الرياضيات مع دورة القرن التاسع عشر) في سلامة الرياضيات التقليدية . وشجعتهم على الاستمرار في جهودهم لإقامة رياضيات جديدة أكثر جدارة بالثقة ، لكنها ـ حتى الآن ـ أقل فائدة في التطبيق .

أما الغالبية الساحقة من الرياضيين ومستخدمي الرياضيات ، فتسير أمورهم سيراً عادياً فهم ليسوا بحاجة إلى اليقين حتى يستمروا في بحثهم ودرسهم وتدريسهم وتطبيقاتهم . والتعامل مع النظرية ب8 مستمر ، والبحث فيها وحولها جار . لكن أحداً لن يذهل إذا ما اكتشف فيها تناقضاً غدا . حقاً إن هذا سيكون حدثاً عظيماً ، وسيدخل الرياضيات في أزمة جديدة . لكن المأمول أن تكون ـ كسابقاتها ـ أزمة نمو ، لا أزمة انهيار .

●●●

هل نتيجة جودل ، التي زعزعت اليقين في الرياضيات ، نتيجة يقينية ؟ لقد توصل إليها جودل بنفس الأساليب ، وعلى نفس الأسس ، التي هي الآن موضع شك . إذن فالنتيجة نفسها موضع شك . أي أن الشك الذي توصلنا إليه هو في حد ذاته أمر مشكوك فيه . ولذا فاستعادة اليقين أمر وارد ، وإن كان ليس متوقعاً إلا من خلال تغير جذري في مفاهيمنا الرياضية . والمقصود هنا ، هو استعادة اليقين بمعظم الرياضيات التقليدية ، وليس بالرياضيات الحدسية أو البنائية (انظر عاليه) ، التي لم يدّع أحد ـ حتى الآن ـ بأنها موضع شك .

●●●

ما شأن كل هذا بمعرفة الكون ؟ لعل هذا هو أكثر ما يعني المشتغلين بالعلوم الطبيعية والبيولوجية والإنسانية ، وفلسفاتها . لنلاحظ أولا أن كون الاطار الطبيعي (الذي يضم كل الأعداد الطبيعية) لانهائي قد لعب دوراً لا غنى عنه في ظهور المشكلات السابقة . ولو لم يكن الأمر كذلك ، أي لو كان الإطار الطبيعي محدودا ، ما نشأت هذه المشكلات ، بل وما كان هناك فرق بين الرياضيات التقليدية والرياضيات الحدسية والبنائية . وعلى هذا فعلاقة نتائج جودل بمعرفة الكون تتوقف على ما إذا كان الكون لانهائياً . وفي نقاشنا التالي لعلاقة المواقف الثلاثة الممكنة من قضية لانهائية الكون بنتائج جودل ومشكلة المعرفة ، سنفهم « الكون » بالمعنى الواسع الذي يسمح باعتبار الظواهر الإنسانية ظواهر كونية . أيضاً ، ما نقوله عن الكون يمكن أن يقال عن أي جزء من أجزائه ، أو أي جانب من جوانبه .

(١) الكون لا نهائي :

إذا كان الكون لانهائياً ، في أي وجه من وجوهه ، فالمتوقع أن يكون أعقد من الإطار الطبيعي (أي الأعداد

الطبيعية مع الجمع والضرب) ، وبالتالي فمن المتوقع أن تسري عليه نتائج جودل . أي أن مجموعة الحقائق الكونية لا يمكن استنتاجها من مجموعة فعالة من المسلمات ، وأنه لا يمكن الاطمئنان إلى اتساق أية نظرية كونية قوية .

(٢) الكون محدود :

المقصود هنا أن يكون الكون محدوداً من جميع الوجوه . أي أن يكون مكوناً من عدد محدود من الأشياء ، لكل منها عدد محدود من الصفات ، وتدخل في بعضها البعض في عدد محدود من العلاقات الثنائية ، كما تدخل مع بعضها البعض في عدد محدود من العلاقات الثلاثية ، وهكذا ، على أن يكون عدد كل العلاقات محدودا . وأيضاً أن يكون محدوداً في الزمان ، بمعنى أنه لا يمر إلا بعدد محدود من الأطوار ، ثم يثبت أو ينتهي أو يعيد الكرّة .

في هذه الحال نتائج جودل غير واردة بالنسبة إلى الكون . ومجموعة الحقائق الكونية لن يكون من الممكن فقط استنتاجها من مجموعة فعالة من المسلمات ، بل ستكون هي نفسها مجموعة فعالة . ولن تكون هناك مشكلة في إثبات اتساق النظرية المكونة من الحقائق الكونية كلها . والتوصل إلى هذه النظرية أمر وارد نظرياً ، غير أن هذا شيء ، والتوصل إليها فعلا شيء آخر . وحتى إذا توصلنا إليها فعلا ، فقد يتعذر علينا التأكد من هذا .

ورغم أن المجال لا يسمح بالخوض في مزيد من التفصيلات ، فقد يكون من المفيد أن نذكر هنا أن مشكلة الاستقراء التي أثارها ديفيد هيوم سيكون من السهل حلها في حالنا هذه . إذ أن عدد كل ما لدينا من أشياء محدود ، وبالتالي فمن الممكن أن يكون الاستقراء دائماً استقراء كاملا .

(٣) الكون آخذ في الاتساع :

المقصود أن يكون الكون ـ حتى كل لحظة ـ محدودا بالمعنى الوارد في (٢) ، لكن الحدود متحركة ، كلها أو بعضها . كأن يكون عدد الأشياء التي يتكون منها الكون اليوم مليوناً ، ويصير غداً مليوناً وألفاً ، وهكذا .

وفي هذه الحال ، يبدو أن الرياضيات الحدسية أو البنائية ستكون كافية لدراسة الكون ، ويكون استخدامنا الحالي للرياضيات التقليدية نوعاً من الاستسهال . أي أن لنا أن نختار بين رياضيات أصعب في التعامل ، لكنها أجدر بالثقة ، وبين رياضيات أسهل في التعامل ، لكنها تعاني من كل المشكلات التي أوضحها جودل(*).

* * *

(*) لكن ما رأى علماء الكون في قضية لانهائيته ؟ الإجابة عن هذا السؤال خارج نطاق هذا المقال ، ويمكن للقارىء أن يرجع فيها إلى المرجع رقم (٦) ، حيث سيجد المزيد من المراجع .

المراجـــع

(1) Godel Kurt; **On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems;** Basic Books Inc. New York, 1962.

(2) Hofstadter, Douglas R.; Godel, Escher, Bach: **An Eternal Golden Braid,** Vintage Books, New York, 1980.

(3) Kleene, Stephen Cole; **Mathematical Logic;** John Wiley and Sons, Inc. New York, 1967.

(4) Mendelson, Elliott; **Introduction to Mathematical Logic;** D. Van Nostrand Company, Inc. Princeton, New Jersey, 1964.

(5) Nagel, Ernest and Newman, James R.; **Godel's Proof;** New York University Press, 1964.

(6) Sagan, Carl; **Cosmos; Random House,** New York, 1980.

(7) Taraki, Alfred; The Concept of Truth In Formalized Languages; In; **Logic, Semantics, Metamathematics;** By the same author, Oxford At The Clarandon Press, 1956.

(8) ————; Truth and Proof; **Scientific American, June 1969.** Also, republished in: **Fundamental Problems In Philosophy;** Edited by Oswald Hanfling; Basil Black-well In Associations with The Open University Press, 1972.

المرجع (١) ترجمة للبحث الأصلي لجودل ، مصحوبة بمقدمة مبسطة .

المراجع (٣) ، (٤) ، (٧) مكتوبة للمتخصصين . المرجع (٧) بحث له أهمية تاريخية فيها يتعلق بقضية الصدق . والمرجعان (٣) ، (٤) كتابان جامعيان يغطي كل منهما : اللغات الرمزية ، البرهان ، الصدق ، نتائج جودل.

المراجع (٢) ، (٥) ، (٦) ، (٨) مكتوبة لغير المتخصصين . وكلها - عدا (٦) - تستعـرض وتناقش نتـائج جودل . المرجع (٢) يربطها بالرسم والموسيقى ، والمرجع (٨) يركز أكثر على قضيتي الصدق والبرهان . أما المرجع (٦) فيبحث في الكون وفهمنا له .

* * *